

Здравствуйте, студенты 501 группы!

Учебная дисциплина: математика

Тема урока: Решение задач на применение интеграла.

Задание к уроку:

Вам необходимо внимательно изучить методические указания к практической работе и выполнить задание по указанному алгоритму, письменно ответить на контрольные вопросы.

Выполненную работу оформить в соответствии с требованиями практической работы и отправить отдельным файлом (электронный документ) в личное сообщение через социальные сети VK: <https://vk.com/id18621014> или на электронную почту преподавателя: chertovs_nat@mail.ru

Если такой возможности нет, выполненное задание предоставить в распечатанном (рукописном) виде после возобновления занятий.

Практическое занятие №12

Тема: Решение задач на применение интеграла.

Цель: ознакомиться с применением интеграла для решения задач и выполнить задания.

Содержание работы.

Мощным средством исследования в математике, физике, механике и других дисциплинах является определенный интеграл – одно из основных понятий математического анализа.

Геометрический смысл интеграла – площадь криволинейной трапеции. Физический смысл интеграла:

- 1) масса неоднородного стержня с плотностью,
- 2) перемещение точки, движущейся по прямой со скоростью за промежуток времени.

Напомню свойства интеграла:

Как вычислять площадь криволинейной трапеции мы уже тренировались. Вычисление объемов тел разобрали на прошлом уроке. А вот физическое приложение интегралов покажу подробнее.

Путь, пройденный точкой при неравномерном движении по прямой с переменной скоростью $v = f(t) \geq 0$ за промежуток времени от t_1 до t_2 вычисляется по формуле $S = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$.

Примеры:

1. Скорость движения точки $v = (9t^2 - 8t)$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за 4-ю секунду.

Решение: согласно условию, $f(t) = 9t^2 - 8t$, $t_1 = 3, t_2 = 4$.

Следовательно, $s = \int_3^4 (9t^2 - 8t) dt = [3t^3 - 4t^2]_3^4 = 83$ (м).

2. Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью $v = (6t^2 + 2t)$ м/с, второе — со скоростью $v = (4t + 5)$ м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 5 с?

Решение: очевидно, что искомая величина есть разность расстояний, пройденных первым и вторым телом за 5 с:

$$s_1 = \int_0^5 (6t^2 + 2t) dt = [2t^3 + t^2]_0^5 = 275 \text{ (м)}, s_2 = \int_0^5 (4t + 5) dt = [2t^2 + 5t]_0^5 = 75 \text{ (м)},$$

$$s_1 - s_2 = 275 - 75 = 200 \text{ (м)}.$$

3. Тело брошено с поверхности земли вертикально вверх со скоростью $v = (39,2 - 9,8t)$ м/с. Найти наибольшую высоту подъема тела.

Решение: тело достигнет наибольшей высоты подъема в такой момент времени t , когда $v = 0$, т.е. $39,2 - 9,8t = 0$, откуда $t = 4$ с. По формуле (1) находим

$$s = \int_0^4 (39,2 - 9,8t) dt = [39,2t - 4,9t^2]_0^4 = 78,4 \text{ (м)}.$$

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ РАБОТЫ СИЛЫ

Работа, произведенная переменной силой $f(x)$ при перемещении по оси Ox материальной точки от $x = a$ до $x = b$, находится по

формуле $A = \int_a^b f(x) dx$. (2) При решении задач на вычисление работы силы часто используется закон Гука: $F = kx$, (3) где F — сила Н; x — абсолютное удлинение пружины, м, вызванное силой F , а k — коэффициент пропорциональности, Н/м.

Пример:

Пружина в спокойном состоянии имеет длину 0,2 м. Сила в 50 Н растягивает пружину на 0,01 м. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть ее от 0,22 до 0,32 м?

Решение: используя равенство (3), имеем $50 = 0,01k$, т.е. $k = 5000$ Н/м. Находим пределы интегрирования: $a = 0,22 - 0,2 = 0,02$ (м), $b = 0,32 - 0,2 = 0,12$ (м). Теперь по формуле (2) получим

$$A = \int_{0,02}^{0,12} 5000 dx = 5000 \frac{x^2}{2} \Big|_{0,02}^{0,12} = 2500(0,0144 - 0,0004) = 2500 \cdot 0,014 = 35 \text{ (Дж)}.$$

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ РАБОТЫ, ПРОИЗВОДИМОЙ ПРИ ПОДНЯТИИ ГРУЗА

Задача. Цилиндрическая цистерна с радиусом основания 0,5 м и высотой 2 м заполнена водой. Вычислить работу, которую необходимо произвести, чтобы выкачать воду из цистерны.

Решение: выделим на глубине x горизонтальный слой высотой dx (**рис.**). Работа A , которую надо произвести, чтобы поднять слой воды весом P на высоту x , равна Px .

Изменение глубины x на малую величину dx вызовет изменение объема V на величину $dV = \pi r^2 dx$ и изменение веса P на величину $dP = 9807 \pi r^2 dx$; при этом совершаемая работа A изменится на величину $dA = 9807 \pi r^2 x dx$. Проинтегрировав это равенство при изменении x от 0 до H , получим

$$A = \int_0^H 9807 \pi r^2 x dx = 4903 \pi r^2 H^2 = 4903 \pi * 0,25 * 2^2 = 4903 \pi \text{ (Дж)}$$

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ СИЛЫ ДАВЛЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Значение силы P давления жидкости на горизонтальную площадку зависит от глубины погружения x этой площадки, т. е. от расстояния площадки до поверхности жидкости.

Сила давления (H) на горизонтальную площадку вычисляется по формуле $P = 9807 \delta S x$,

где δ — плотность жидкости, кг/м^3 ; S — площадь площадки, м^2 ; x — глубина погружения площадки, м.

Если площадка, испытывающая давление жидкости, не горизонтальна, то давление на нее различно на разных глубинах, следовательно, сила давления на площадку есть функция глубины ее погружения $P(x)$.

5. ДЛИНА ДУГИ

Пусть плоская кривая AB (**рис.**) задана уравнением $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$), причем $f(x)$ и $f'(x)$ — непрерывные функции в промежутке $[a, b]$. Тогда

дифференциал dl длины дуги AB выражается формулой $dl = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$
или $dl = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$, а длина дуги AB вычисляется по формуле $L = \int_a^b dl = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$. (4)

где a и b —значения независимой переменной x в точках A и B . Если кривая задана уравнением $x = \varphi(y)$ ($c \leq y \leq d$), то длина дуги AB вычисляется по формуле $L = \int_c^d \sqrt{1 + [\varphi'(y)]^2} dy$, (5) где c и d значения независимой переменной y в точках A и B .

6. ЦЕНТР МАСС

При нахождении центра масс пользуются следующими правилами:

1) Координата x центра масс системы материальных точек $A_1, A_2, \dots, A_n$ с массами $m_1, m_2, \dots, m_n$, расположенных на прямой в точках с координатами $x_1, x_2, \dots, x_n$, находится по формуле

$$x' = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \quad (*);$$

2) При вычислении координаты центра масс можно любую часть фигуры заменить на материальную точку, поместив ее в центр масс этой части, и приписать ей массу, равную массе рассматриваемой части фигуры. Пример. Пусть вдоль стержня-отрезка $[a; b]$ оси Ox - распределена масса плотностью $\rho(x)$, где $\rho(x)$ - непрерывная функция. Покажем, что а) суммарная масса M стержня равна $\int_a^b \rho(x) dx$; б) координата центра масс x' равна $\frac{1}{M} \int_a^b x \rho(x) dx$.

Разобьем отрезок $[a; b]$ на n равных частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ (**рис.**). На каждом из n этих отрезков плотность можно считать при больших n постоянно и примерно равной $\rho(x_{k-1})$ на k -м отрезке (в силу непрерывности $\rho(x)$). Тогда масса k -ого отрезка примерно равна $m_k = \frac{b-a}{n} \rho(x_{k-1})$, а масса всего стержня равна $\frac{b-a}{n} (\rho(x_0) + \rho(x_1) + \dots + \rho(x_{n-1}))$.

Считая каждый из n маленьких отрезков материальной точкой массы m_k , помещенной в точке x_{k-1} , получим по формуле (*), что координата центра масс приближенно находится так

$$x_n = \frac{\frac{b-a}{n} (x_0 \rho(x_0) + x_1 \rho(x_1) + \dots + x_{n-1} \rho(x_{n-1}))}{\frac{b-a}{n} (\rho(x_0) + \rho(x_1) + \dots + \rho(x_{n-1}))}$$

Теперь осталось заметить, что при $n \rightarrow \infty$ числитель стремится к интегралу $\int_a^b x \rho(x) dx$, а знаменатель (выражающий массу всего стержня) - к интегралу $\int_a^b \rho(x) dx$.

А теперь практические задания.

Решите задачи.

Вариант 1	Вариант 2
1. Вычислите массу участка стержня от $x_1 = 1$ до $x_2 = 2$, если его линейная плотность задается формулой $p(x) = 4x^3 + 5x + 2$.	1. Вычислите работу за промежуток времени $[4; 9]$, если мощность вычисляется по формуле $N(t) = 6\sqrt{t} + t^2$.
2. Вычислите количество электричества, протекающего по проводнику за промежуток времени $[2; 3]$, если сила тока задается формулой $I(t) = 3t^2 - 2t + 5$.	2. Вычислите работу по переносу единичной массы, совершенную силой $F(x) = 6x^2 + 4x - 2$ на участке $[-1; 2]$.

ИНСТРУКЦИОННАЯ КАРТА

для проведения практической работы № 12

Тема: Решение задач на применение интеграла.

Цель: ознакомиться с применением интеграла для решения задач и выполнить задания.

Необходимо знать: основные формулы и правила интегрирования.

Необходимо уметь: применять основные формулы и правила интегрирования

Оборудование (приборы, материалы, дидактическое обеспечение): методические рекомендации к выполнению работы; задание и инструкционная карта для проведения практического занятия

Теория:

Для выполнения заданий по данной теме необходимо предварительно изучить теоретические материалы, а также методические рекомендации к выполнению работы

Порядок выполнения задания, методические указания:

-ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме;

- изучить схему решения задач;
- выполнить задания практической работы;
- сформулировать вывод

Содержание отчета

Отчет по практической работе должен содержать: основные определения, рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ; вывод по работе.

Контрольные вопросы:

1. Запишите свойства интеграла.
2. Запишите формулу Ньютона – Лейбница.
3. В чем состоит геометрический смысл интеграла?