14.11.2020

Здравствуйте, дорогие студенты!

Учебная дисциплина: «Математика»
Тема урока: «Дискретные и непрерывные случайные величины»

Задание к лекции:

Вам необходимо самостоятельно изучить текст лекции, выполнить задания к лекции и письменно ответить на контрольные вопросы.

Выполненную работу оформить в рабочей тетради и отправить отдельным файлом (электронный документ) в личное сообщение через социальные сети VK (Анжелика-Валерьевна Синещекова г. Луганск).

Оригинал работы в рукописном виде (в обязательном порядке!!!) предоставить по окончании дистанционного обучения (в период учебной практики).

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ:

Второй раздел по теории вероятностей посвящён ***случайным величинам***.

Случайной называют *величину*, которая в результате испытания примет **одно и только одно** числовое значение, зависящее от случайных факторов и заранее непредсказуемое.

Случайные величины, как правило, **обозначают** через X, Y, Z *****, а их значения – соответствующими маленькими буквами с подстрочными индексами, например, x_1, x_2, x_3.

***(Иногда используют** U, V, W, а также греческие буквы).*

Пример встретился нам на первом же уроке по теории вероятностей, где мы фактически рассмотрели следующую случайную величину:

X – количество очков, которое выпадет после броска игрального кубика.

В результате данного испытания выпадет **одна и только** грань, какая именно – не предсказать *(фокусы не рассматриваем)*; при этом случайная величина X может принять одно из следующий значений:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 4, \quad x_5 = 5, \quad x_6 = 6.$$

Пример из урока о Статистическом определении вероятности:

Y – количество мальчиков среди 10 новорождённых.

Совершенно понятно, что это количество заранее не известно, и в очередном десятке родившихся детей может оказаться:

$$y_0 = 0, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = 2, \quad y_3 = 3, \quad \ldots, y_9 = 9,$$

либо $y_{10} = 10$ мальчиков – **один и только один** из перечисленных вариантов.

И,немного физкультуры: Z – дальность прыжка в длину *(в некоторых единицах)*.

Коль скоро речь идёт о **множестве действительных чисел**, то случайная величина Z может принять *несчётно много* значений из некоторого числового промежутка. И в этом состоит её принципиальное отличие от предыдущих примеров.

Таким образом, **случайные величины целесообразно разделить на 2 большие группы**:

1) **Дискретная** *(прерывная)* случайная величина – принимает отдельно взятые, изолированные значения. Количество этих значений *конечно* либо *бесконечно, но счётно*.

2) **Непрерывная** случайная величина – принимает **все** числовые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Сначала разберём дискретную случайную величину, затем – непрерывную.

Закон распределения дискретной случайной величины

– это *соответствие* между возможными значениями этой величины и их вероятностями. Чаще всего закон записывают таблицей:

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Довольно часто встречается термин ***ряд** распределения*, но в некоторых ситуациях он звучит двусмысленно, и поэтому я буду придерживаться «закона».

А теперь **очень важный момент**: поскольку случайная величина X *обязательно* примет**одно из значений** $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, то соответствующие события образуют **полную группу** и сумма вероятностей их наступления равна единице:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$$

или, если записать свёрнуто:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Так, например, закон распределения вероятностей выпавших на кубике очков имеет следующий вид:

X	1	2	3	4	5	6
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Возможно, у вас сложилось впечатление, что дискретная случайная величина может принимать только «хорошие» целые значения. Развеем иллюзию – они могут быть любыми:

Пример 1

Некоторая игра имеет следующий закон распределения выигрыша:

U	-5	$2,5$	10
	$0,5$	p_2	$0,1$

Найти p_2.

Решение: так как случайная величина U может принять только одно из трёх значений, то соответствующие события образуют *полную группу*, а значит, сумма их вероятностей равна единице:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

Итак: $0,5 + p_2 + 0,1 = 1$, $p_2 + 0,6 = 1 \Rightarrow p_2 = 1 - 0,6$ – таким образом, вероятность p_2 выигрыша $u_2 = 2,5$ условных единиц составляет 0,4.

Контроль: $p_1 + p_2 + p_3 = 0,5 + 0,4 + 0,1 = 1$, в чём и требовалось убедиться.

Ответ: $p_2 = 0,4$.

Не редкость, когда закон распределения требуется составить самостоятельно. Для этого используют классическое определение вероятности, теоремы умножения , сложения вероятностей событий и другие .

Пример 2

В коробке находятся 50 лотерейных билетов, среди которых 12 выигрышных, причём 2 из них выигрывают по 1000 рублей, а остальные – по 100 рублей. Составить закон распределения случайной величины V – размера выигрыша, если из коробки наугад извлекается один билет.

Решение: как вы заметили, значения случайной величины принято располагать в порядке их возрастания. Поэтому мы начинаем с самого маленького выигрыша, и именно $v_1 = 0$ рублей.

Всего таковых билетов 50 – 12 = 38, и по классическому определению:

$$p_1 = \frac{38}{50} = 0,76$$

– вероятность того, что наудачу извлечённый билет окажется безвыигрышным.

С остальными случаями всё просто. Вероятность выигрыша $v_2 = 100$ рублей составляет:

$$p_2 = \frac{10}{50} = 0,2$$

И для $v_3 = 1000$:

$$p_3 = \frac{2}{50} = 0,04$$

Проверка: $p_1 + p_2 + p_3 = 0,76 + 0,2 + 0,04 = 1$ – и это особенно приятный момент таких заданий!

Ответ: искомый закон распределения выигрыша выглядит следующим образом :

V	0	100	1000
	0,76	0,2	0,04

.

Закон распределения полностью описывает случайную величину, однако на практике бывает полезно (а иногда и полезнее) знать лишь некоторые её ***числовые характеристики***.

Пример 3

Вероятность того, что стрелок поразит мишень, равна $p = 0{,}7$. Составить закон распределения случайной величины W – количества попаданий после 2 выстрелов.

Решение:

по условию $p = 0{,}7$ – вероятность попадания в мишень. Тогда:

$$q = 1 - p = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$$ – вероятность промаха.

Составим W – закон распределения попаданий при двух выстрелах:

$w_1 = 0$ – ни одного попадания.

По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$$p_1 = qq = 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$$

$w_2 = 1$ – одно попадание. По теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения независимых событий:

$$p_2 = pq + qp = 0{,}7 \cdot 0{,}3 + 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}21 + 0{,}21 = 0{,}42$$

$w_3 = 2$ – два попадания. По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$$p_3 = pp = 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}49.$$

Проверка: 0,09 + 0,42 + 0,49 = 1.

Ответ:

W	0	1	2
	0,09	0,42	0,49

.

Математическое ожидание дискретной случайной величины

Говоря простым языком, это *среднеожидаемое значение* при многократном повторении испытаний. Пусть случайная величина X принимает значения $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ соответственно. Тогда математическое ожидание $M(X)$ данной случайной величины равно *сумме произведений* всех её значений на соответствующие вероятности:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \ldots + x_np_n$$

или в свёрнутом виде:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i$$

Вычислим, например, математическое ожидание случайной величины X – количества выпавших на игральном кубике очков:

$$M(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5$$ очка

В чём состоит вероятностный смысл полученного результата? Если подбросить кубик достаточно много раз, то *среднее значение* выпавших очков будет близко к 3,5 – и чем больше провести испытаний, тем ближе. Собственно, об этом эффекте подробно изложено на уроке о **статистической вероятности**.

Теперь вспомним нашу гипотетическую игру:

U	-5	$2{,}5$	10
	$0{,}5$	$0{,}4$	$0{,}1$

Возникает вопрос: а выгодно ли вообще играть в эту игру? Но на этот вопрос можно легко ответить, вычислив математическое ожидание, по сути – *средневзвешенный* по вероятностям выигрыш:

$$M(U) = u_1p_1 + u_2p_2 + u_3p_3 = -5 \cdot 0{,}5 + 2{,}5 \cdot 0{,}4 + 10 \cdot 0{,}1 = -2{,}5 + 1 + 1 = -0{,}5$$, таким образом, математическое ожидание данной игры **проигрышно**.

Да, здесь можно выиграть 10 и даже 20-30 раз подряд, но на длинной дистанции ждёт неминуемое разорение.

Из всего вышесказанного следует, что математическое ожидание – это уже НЕ СЛУЧАЙНАЯ величина.

Пример 4

Мистер Х играет в европейскую рулетку по следующей системе: постоянно ставит 100 рублей на «красное». Составить закон распределения случайной величины X – его выигрыша. Вычислить математическое ожидание выигрыша и округлить его до копеек. Сколько *в среднем* проигрывает игрок с каждой поставленной сотни?

***Справка**: европейская рулетка содержит 18 красных, 18 чёрных и 1 зелёный сектор («зеро»). В случае выпадения «красного» игроку выплачивается удвоенная ставка, в противном случае она уходит в доход казино*

Решение:

игрок выигрывает 100 рублей в 18 случаях из 37, и поэтому закон распределения его выигрыша имеет следующий вид:

X	-100	100
	$\frac{19}{37}$	$\frac{18}{37}$

Вычислим математическое ожидание:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 = -100 \cdot \frac{19}{37} + 100 \cdot \frac{18}{37} = -\frac{1900}{37} + \frac{1800}{37} = -\frac{100}{37} \approx -2{,}70$$

Таким образом, с каждой поставленной сотни игрок в среднем проигрывает 2,7 рубля.

Пример 5

Случайная величина X задана своим законом распределения вероятностей:

X	-1	0	x_3	5
	$0{,}3$	$0{,}2$	$0{,}1$	$0{,}4$

Найти x_3, если известно, что $M(X) = 1{,}9$. Выполнить проверку.

***Примечание**: можно было использовать обозначения $w_0, w_1, w_2, p_0, p_1, p_2$ – это не принципиально.*

Решение:

по определению математического ожидания:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4$$
$$1{,}9 = -1 \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}2 + x_3 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}4$$

поменяем части местами и проведём упрощения:

$$-0{,}3 + 0 + 0{,}1x_3 + 2 = 1{,}9$$
$$0{,}1x_3 + 1{,}7 = 1{,}9$$
$$0{,}1x_3 = 1{,}9 - 1{,}7$$
$$0{,}1x_3 = 0{,}2$$

, таким образом: $x_3 = \frac{0{,}2}{0{,}1} = \frac{2}{1} = 2$.

Выполним проверку:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4 = -1 \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}5 = = -0{,}3 + 0 + 0{,}2 + 2 = 1{,}9$$,

что и требовалось проверить.

Ответ: $x_3 = 2$.

ЗАДАНИЯ К ЛЕКЦИИ:

- оформить конспект учебного материала по данной теме;
- **Все примеры** занести в основной текст конспекта с комментариями решением;
- письменно ответить на **КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ:**
  1. На какие основные группы делят **случайные величины ?**
  2. Может ли дискретная случайная величина принимать дробное значение ?