22.12.2020

Здравствуйте, учащиеся 105 группы!

Учебная дисциплина: математика
Тема урока: Степени с действительными показателями и их свойства.

Задание к уроку:

Вам необходимо самостоятельно изучить теоретические сведения, написать конспект урока и письменно выполнить задания.

Выполненную работу оформить в рабочих тетрадях, сфотографировать и отправить отдельным файлом в личное сообщение через социальные сети VK (в личку): https://vk.com/id18621014 или на электронную почту преподавателя: chertovs_nat@mail.ru

Выполненное задание предоставить в рукописном виде при выходе на учебную практику.

Учебник: Ш. А. Алимов «Алгебра и начала математического анализа» 10-11 кл. https://vpr-klass.com/uchebniki/matematika/10-11_klass_alimov/10-11_klass_alimov_uchebnik_chitat'_onlajn.html

I. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ:

Давайте вспомним, как мы с вами поступаем на практике, когда нам приходится иметь дело, например, с числом $\sqrt{2}$. Конечно же, мы заменяем его приближением.

Например, мы можем заменить $\sqrt{2} \approx 1{,}4$ (с недостатком), $\sqrt{2} \approx 1{,}5$ (с избытком),

в зависимости от того, по недостатку или избытку требуется приблизить значение $\sqrt{2}$.

Либо же можем записать: $\sqrt{2} \approx 1{,}41$, $\sqrt{2} \approx 1{,}42$ и так далее.

Аналогично действуют и при возведении некоторого числа $a^{\sqrt{2}}$, то есть число a возводят в степень рационального приближения числа $\sqrt{2}$.

А теперь давайте рассмотрим общий вид степени с ***действительным показателем***. Пусть **а** – некоторое положительно число $(a > 0)$, x — произвольное *иррациональное* число.

Его обозначают так: a^x и называют степенью числа **а** с показателем x.

Таким образом, a^x определена для любого $a > 0$ и любого действительного показателя x.

При любом действительном $x \in \mathbb{R}$ и любом $a > 0$ a^x является положительным ***действительным*** числом $a^x > 0$ при $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

Давайте разберёмся, почему мы определяем степень с ***действительным показателем*** только для положительного основания.

Итак, в случае если $a = 0$, то 0^x определяют только при $x > 0$ и считают, что $0^x = 0$ при $x > 0$.

Например, $0^{\sqrt{5}} = 0$, $0^{0,3} = 0$.

Если же $x \leq 0$, то выражение 0^x не имеет смысла.

Например, $0^{-3} = \emptyset$, $0^{-\sqrt{5}} = \emptyset$.

При таком определении степени с ***действительным показателем*** сохраняются все известные вам свойства степени с *рациональным показателем*. Сформулируем эти свойства.

Пусть $a > 0$, x, x_1, x_2 – любые действительные числа. Тогда справедливы следующие равенства.

1. $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$.
2. $a^{x_1} : a^{x_2} = a^{x_1 - x_2}$.
3. $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}$.
4. $(ab)^x = a^x b^x$.
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.

К этим свойствам добавляется ещё одно:

6. Если $a > 1$, то $a^x > 1$ при $x > 0$.

Доказательство этих равенств основывается на свойствах степени с *рациональным показателем* и на теории пределов последовательностей, которая изучается в курсе высшей математике.

А теперь давайте докажем следующую теорему, применяя свойства степени с ***действительным показателем***.

При возведении неравенства с положительной левой и положительной правой частями в положительную степень знак неравенства не меняется, а при возведении в отрицательную степень знак неравенства меняется на противоположный.

А теперь давайте приступим к практической части нашего урока.

<u>Пример 1</u>. Сравните числа $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}+1}$ и $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$.

<u>Решение</u>.

$\sqrt{2} + 1 > \sqrt{3}$

$(\sqrt{2} + 1)^2 = (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} + 1 = 2 + 2\sqrt{2} + 1 = 3 + 2\sqrt{2}$

$(\sqrt{3})^2 = 3$

$3 + 2\sqrt{2} > 3$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}.$$

__Пример 2.__ Сравнить числа $5^{2\sqrt{3}}$ и $5^{3\sqrt{2}}$

Сравним показатели $2\sqrt{3}$ и $3\sqrt{2}$

Т.к. $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$, $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$ и 12 < 18, то $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$.

Поэтому по теореме $5^{2\sqrt{3}} < 5^{3\sqrt{2}}$

__Пример 3__. Решим уравнение

$4x = 2^{4\sqrt{3}}$

$4^{x} = (2^{2})^{x} = 2^{2x}$.

Поэтому уравнение можно записать так:

$2^{2x} = 2^{4\sqrt{3}}$

Получим, $2x = 4\sqrt{3}$, разделим на 2 обе части уравнения.

Следовательно, $x = 2\sqrt{3}$

__Пример 4.__ Сравнить числа $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{3}$

Избавимся от корней, для это возведем оба числа в шестую степень, т.к. шесть делится - наименьшее общее кратное двух и трех:

$(\sqrt{2})^{6} = (2^{\frac{1}{2}})^{6} = 2^{3} = 8$

$(\sqrt{3})^{6} = (3^{\frac{1}{3}})^{6} = 3^{2} = 9$

Т.к. 0<8<9 и $\frac{1}{6} > 0$, то $8^{\frac{1}{6}} > 9^{\frac{1}{6}}$, т.е. $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$.

__Пример 5.__ Вычислите:

а) $\mathbf{27^{\frac{1}{3}}}$; б) $\mathbf{32^{-\frac{1}{3}}}$; в) $\mathbf{0,001^{-\frac{1}{3}}}$; г) $\mathbf{0,0001^{-\frac{3}{4}}}$.

а) $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3;$

б) $32^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{32^{\frac{1}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{32}} = \frac{1}{2};$

в) $0,001^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{0,001^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{0,001^2}} =$

$= \frac{1}{\left(\sqrt[3]{0,001}\right)^2} = \frac{1}{0,1^2} = \frac{1}{0,01} = 100;$

г) $0,0001^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{0,0001^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{0,0001^3}} =$

$= \frac{1}{\left(\sqrt[4]{0,1^4}\right)^3} = \frac{1}{0,1^3} = \frac{1}{0,001} = 1000.$

II. ЗАДАНИЯ:

1) Написать и выучить конспект урока;

2) В зависимости от своей оценки за диагностики, запишите себе домашнее задание. «стандарт» - оценка «3», «хорошо» - оценка «4», «отлично» - оценка «5»

стандарт	хорошо	отлично
35.13. Вычислите: а) $\sqrt[4]{32\cdot 3}\cdot\sqrt[4]{8\cdot 27}$; б) $\sqrt[5]{2^5\cdot 7^2}\cdot\sqrt[5]{7^3}$.	**35.20.** Преобразуйте заданное выражение к виду $\sqrt[n]{A}$: а) $\sqrt[12]{a^2b^3} : \sqrt[6]{ab^4}$; б) $\sqrt[4]{a^3b^5} : \sqrt[5]{ab}$.	**36.19.** Преобразуйте заданное выражение к виду $\sqrt[n]{A}$: а) $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2m^4n^8}}$; б) $\sqrt[7]{q\sqrt[5]{2p^3q}}$.
36.12. Выполните действия: а) $\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{5}\right)$.	**36.25.** Выполните действия: а) $\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\left(1-\sqrt[4]{a}\right)$	**36.25.** Выполните действия: а) $\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\left(1-\sqrt[4]{a}\right)$
На закрепление нового понятия:		
37.1. Представьте степень в виде корня: $p^{5\frac{1}{2}}$. **37.12.** Вычислите: $4^{-\frac{1}{2}}$.	**37.2.** Представьте степень в виде корня: $t^{0,8}$. **37.12.** Вычислите: $4^{-\frac{1}{2}}$. **37.13.** Имеет ли смысл выражение $(-16)^{\frac{2}{3}}$?	**37.20–37.22.** Найдите значение выражения: $2^{1,3}\cdot 2^{-0,7}\cdot 4^{0,7}$; $8^{-\frac{1}{3}}\cdot 16^{\frac{1}{3}} : \sqrt[3]{2}$.