09.02.2021

Здравствуйте, учащиеся 205 группы!

Учебная дисциплина: математика
Тема урока: Обратные функции, их график.

Задание к уроку:

Вам необходимо самостоятельно изучить теоретические сведения, написать конспект урока и письменно выполнить задания.

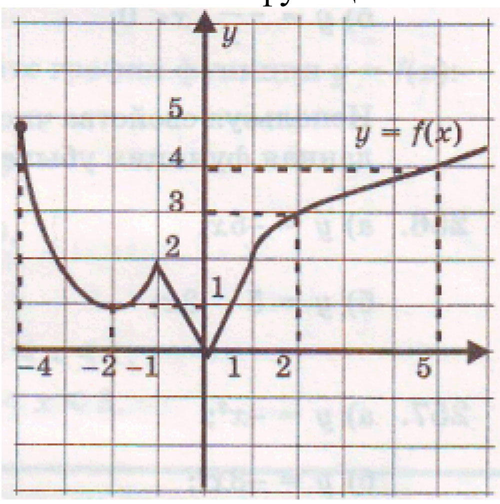
Выполненную работу оформить в рабочих тетрадях, сфотографировать и отправить отдельным файлом в личное сообщение через социальные сети VK (в личку): ***https://vk.com/id18621014*** *или на электронную почту преподавателя:* ***chertovs_nat@mail.ru***

Выполненное задание предоставить в рукописном виде при выходе на учебную практику.

Учебник: Ш. А. Алимов «Алгебра и начала математического анализа» 10-11 кл. https://vpr-klass.com/uchebniki/matematika/10-11_klass_alimov/10-11_klass_alimov_uchebnik_chitat'_onlajn.html

I. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ:

Для начала выполним **задание:** рассмотреть график функции и перечислить изученные свойства функции.



Свойства функции:

D(f) = [-4;∞), E(y) = [0;∞).

Ни четная, ни нечетная, непериодическая, непрерывная, ограничена снизу.

y=0 при x=0.

y>0 при на [-4;0) и на (0;∞).

Возрастает на (-2;-1) и на (0;∞);
убывает на (-4;-2) и на (-1;0).

$y_{наиб}$- не существует;
$y_{наим}$=0 при x=0.

x_{max}= -1 ,y_{max} = 2;
x_{min} = -2, y_{min} = 1;
x_{min} = 0, y_{min} = 0.

Выпукла вниз на (4;-1), выпукла вверх на (1;∞), невыпуклая на [-1;1].

Сегодня вы познакомитесь еще с одним свойством функции – **обратимостью.**

1) Понятие обратимой функции. Достаточное условие обратимости.

Сравним графики двух функций, у которых области определения и множества значений одинаковы, но одна из функций монотонна, а другая нет (рис.2).

Функция $y = f(x)$ обладает свойством, не характерным для функции $y = g(x)$: какое бы число y_0 из множества значения функции f(x) ни взять, оно является значением функции только в одной точке x_0.

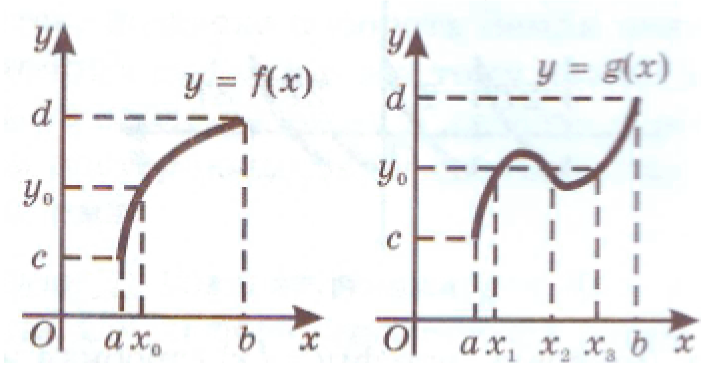


Рис. 2

Определение 1. Функцию $y = f(x), x \in X$ называют **обратимой**, если любое свое значение она принимает только в одной точке множества X.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ монотонна на множестве X, то она обратима.

Доказательство:

Пусть функция y=f(x) возрастает на множестве X и пусть $x_1 \neq x_2$ – две точки множества X.

Для определенности пусть $x_1 < x_2$. Тогда из того, что $x_1 < x_2$ в силу возрастания функции следует, что $f(x_1) < f(x_2)$.

Таким образом, разным значениям аргумента соответствуют разные значения функции, т.е. функция обратима.

Аналогично доказывается теорема в случае убывающей функции.

2) Понятие обратной функции, свойства, графики.

Определение 2. Пусть обратимая функция y=f(x) определена на множестве X и область ее значений E(f)=Y. Поставим в соответствие каждому y из Y то единственное значение x, при котором f(x)=y. Тогда получим функцию, которая определена на Y, а X – область значений функции. Эту функцию обозначают $x=f^{-1}(y)$, $y \in Y$ и называют **обратной** по отношению к функции y=f(x), $x \in X$.

Давайте рассмотрим обратные функции на примере.

Например, мы имеем функцию y = 3x + 2.

Для данной функции и область определения, и область значения может принимать все множество действительных чисел. Более того, данная функция является монотонно возрастающей на всем участке.

А теперь давайте из данной зависимости выразим "x". В результате этого получим:

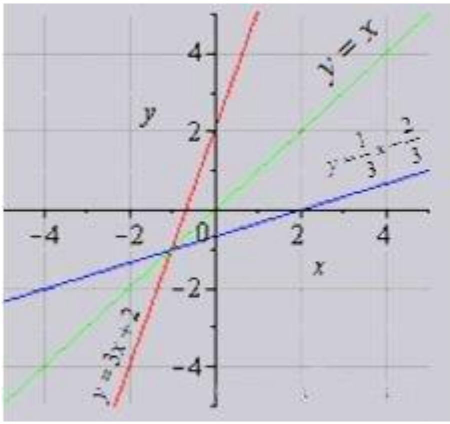
$x = \frac{y}{3} - \frac{2}{3}$

Полученная зависимость будет называться обратной функцией для той, что давалась изначально, только теперь мы получили зависимость "x" от "y".

Если записать второе уравнение в привычном нам виде, то есть заменить "x" на "y" и наоборот, получим:

$y = \frac{x}{3} - \frac{2}{3}$

На графике изобразим первоначальную функцию, обратную ей, и функцию y = x.



Можно заметить, что обратные функции симметричны относительно прямой y = x.

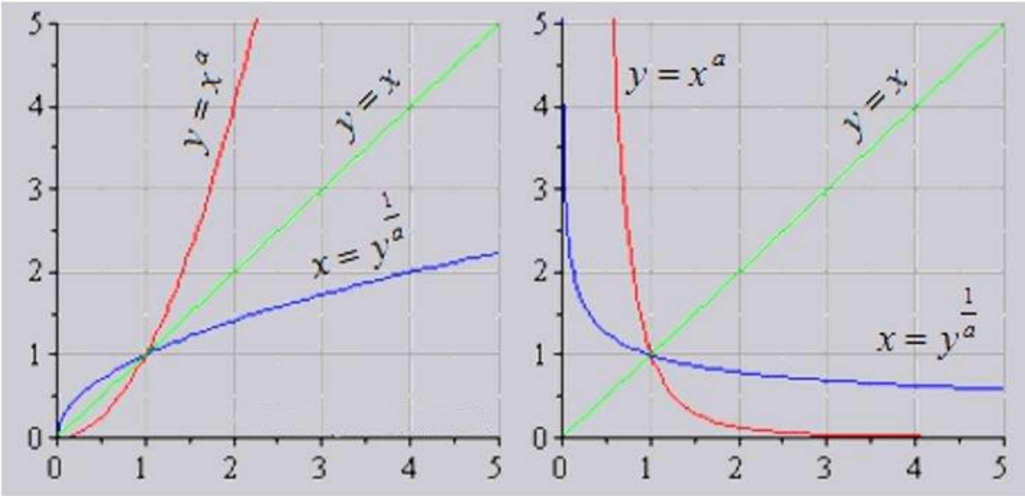
Свойства взаимообратных функций:

1. $y = f(g)y))$ и $x = g(f(x))$
2. Первое свойство дает понять, что область определения второй функции такая же, как и область значения первой.
3. Графики любых взаимообратных функций всегда будут симметричны относительно биссектрисы первой и третьей четверти.
4. Обратные функции имеют одинаковую монотонность.

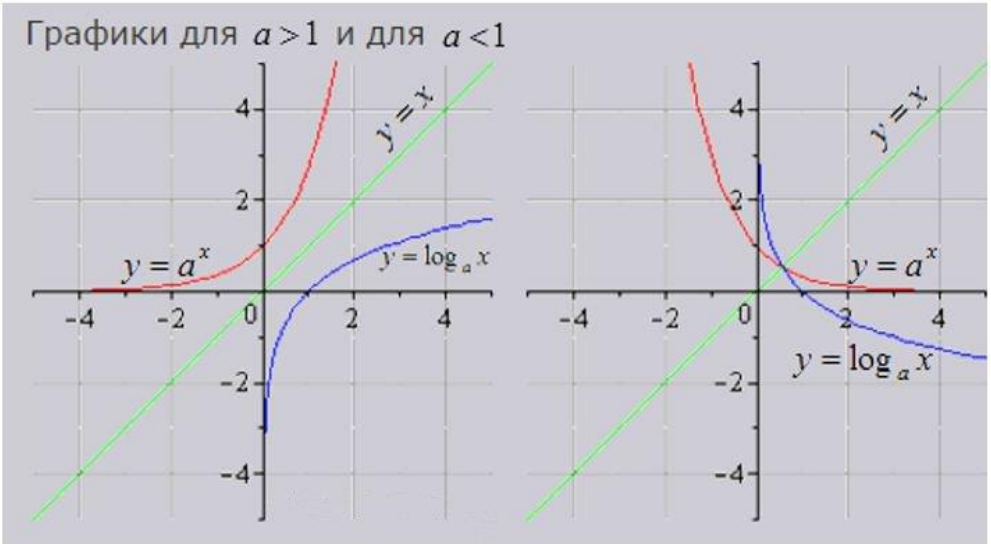
Графики основных обратных функций

1. Степенная функция

Ниже представлены графики, полученные для положительного показателя степени и для отрицательного показателя степени:



2. Обратные логарифмические функции и их графики:



Пример 1. Показать, что для функции y=2x-5 существует обратная функция, и найти ее аналитическое выражение.

Решение. Линейная функция y=2x-5 определена на R, возрастает на R и область ее значений есть R. Значит, обратная функция существует на R. Чтобы найти ее аналитическое выражение, решим уравнение y=2x-5 относительно x; получим $x = \frac{y+5}{2}$. Переобозначим переменные, получим искомую обратную функцию $y = \frac{x+5}{2}$. Она определена и возрастает на R.

Пример 2. Показать, что для функции $y=x^2$, $x \le 0$ существует обратная функция, и найти ее аналитическое выражение.

Решение. Функция непрерывна, монотонна в своей области определения, следовательно, она обратима. Проанализировав области определения и множества значений функции, делается соответствующий вывод об аналитическом выражении для обратной функции, которая имеет вид $y = -\sqrt{x}$.

Пример 3. Построить график функции обратной $y = x^2$, если это возможно.

Решение. На всей своей области определения данная функция не имеет обратной, поскольку она не монотонна. Поэтому рассмотрим промежуток, на котором функция монотонна: $\begin{cases} y = x^2 \\ x \geq 0 \end{cases}$, значит, существует обратная. Найдем ее. Для этого выразим x через y: $x = \sqrt{y}$. Переобозначим $y = \sqrt{x}$ - обратная функция. Построим графики функций (рис. 5) и убедимся, что они симметричны относительно прямой y=x.

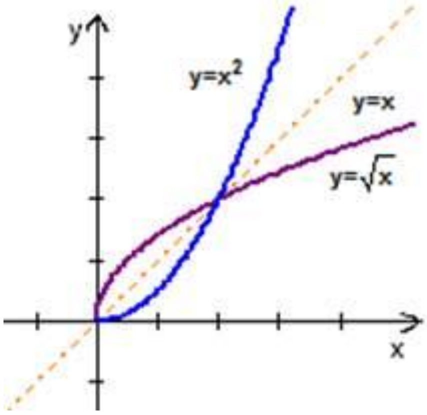


Рис. 5

Пример 4. Найдите множество значений каждой из взаимно обратных функций $f(x), g(x)$, если известно, что $D(f) = (0; +\infty), D(g) = (-\infty; -1]$.

Решение. Согласно свойству 1 взаимно обратных функций, имеем $E(g) = (0; +\infty), E(f) = (-\infty; -1]$.

II. ЗАДАНИЯ:

1) Написать и выучить конспект;

2) Выполнить задания (письменно):

Задание 1.

Является ли функции обратимыми на всей области определения? Если да, то найдите обратную к ней.

a) $y = x^5$; b) $f(x) = (x - 3)^2$; c) $y = \frac{2}{x+3}$.

Задание 2.

Являются ли взаимно обратными функции:

a) $f(x) = \frac{7}{3}x + \frac{3}{7}$ и $g(x) = \frac{3}{7}x + \frac{7}{3}$;

b) $f(x) = 2x + 3$ и $g(x) = 0{,}5x - 1{,}5$.