05.03.2021

Здравствуйте, учащиеся 205 группы!

Учебная дисциплина: математика

Тема урока: Нахождение углового коэффициента касательной к графику функции. Составление уравнения касательной к графику функции.

Задание к уроку:

Вам необходимо самостоятельно изучить теоретические сведения, законспектировать в тетрадь, оформить задачи и решить тест.

Выполненную работу оформить в рабочих тетрадях и отправить отдельным файлом (электронный документ) в личное сообщение через социальные сети VK (в личку) или на электронную почту преподавателя: **chertovs_nat@mail.ru**

Если такой возможности нет, выполненное задание предоставить в рукописном виде при выходе на учебную практику.

Электронный вариант учебника: https://vpr-klass.com/uchebniki/matematika/10-11_klass_alimov/10-11_klass_alimov_uchebnik_chitat'_onlajn.html

I. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ:

Смотрим, разбираемся, конспектируем, решаем самостоятельно по образцу!

1. Что такое касательная к графику функции? Согласны ли вы с утверждением, что «Касательная – это прямая, имеющая с данной кривой одну общую точку»?

Приходим к выводу, что данное утверждение не верно, рассмотрев примеры:

1) Прямая $x = 1$ имеет с параболой $y = x^2$ одну общую точку $M(1; 1)$, однако не является касательной к параболе. Прямая же $y = 2x – 1$, проходящая через ту же точку, является касательной к данной параболе (рисунок 1).

2) Аналогично, прямая $x = \pi$ не является касательной к графику $y = \cos x$, хотя имеет с ним единственную общую точку $K(\pi; 1)$. С другой стороны, прямая $y = - 1$, проходящая через ту же точку, является касательной к графику, хотя имеет с ним бесконечно много общих точек вида ; **$(\pi+2\pi k; 1)$,** где k – целое число, в каждой из которых она касается графика (рисунок 2)

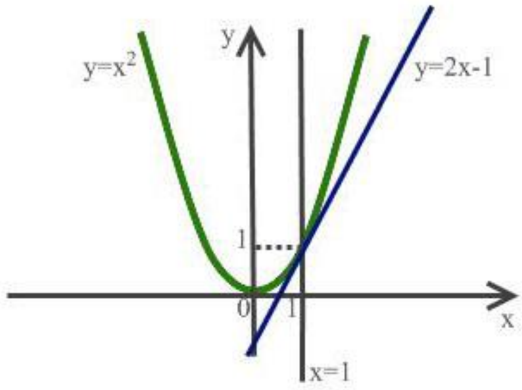


Рисунок 1

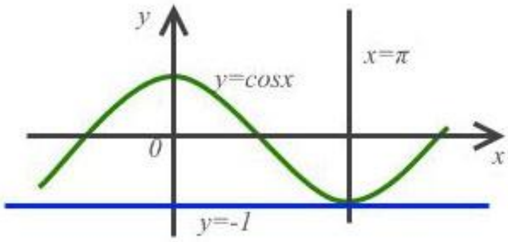


Рисунок 2

Выясним, что такое касательная к графику функции в точке, как составить уравнение касательной?

Что нам для этого понадобится?

Чтобы задать уравнение прямой на плоскости нам достаточно знать её угловой коэффициент и координаты одной точки.

- **Начнём с углового коэффициента**

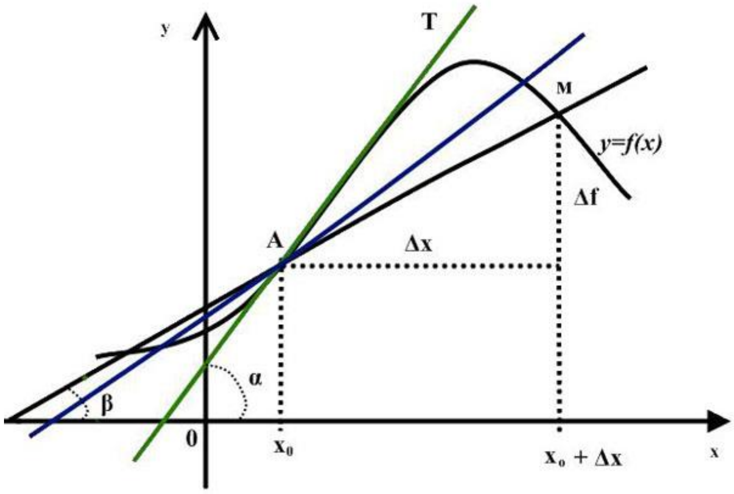


Рисунок 3

Рассмотрим график функции $y = f(x)$ дифференцируемой в точке A$(x_0, f(x_0))$ Выберем на нём точку M $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ и проведем секущую AM. Вопрос: чему равен угловой коэффициент секущей? ($\Delta f/\Delta x = \text{tg}\beta$)

Будем приближать по дуге точку M к точке A. В этом случае прямая AM будет поворачиваться вокруг точки A, приближаясь (для гладких линий) к некоторому предельному положению - прямой AT. Другими словами $\angle TAM \to 0$ если длина $AM \to 0$. Прямую AT, обладающую таким свойством, называют ***касательной*** к графику функции $y = f(x)$ в точке A$(x_0, f(x_0))$.

Угловой коэффициент секущей AM при $AM \to 0$ стремится к угловому коэффициенту касательной AT $\Delta f/\Delta x \to f'(x_0)$. Значение производной в точке x_0 примем за угловой коэффициент касательной. Говорят, что *касательная есть предельное положение секущей при* $\Delta x \to 0$.

Существование производной функции в точке x_0 эквивалентно существованию (невертикальной) касательной в точке $(x_0, f(x_0))$ графика, при этом угловой коэффициент касательной равен $f\ '(x_0)$. В этом состоит *геометрический смысл производной*.

Определение касательной: Касательная к графику дифференцируемой в точке x_0 функции f — это прямая, проходящая через точку $(x_0,\ f(x_0))$ и имеющая угловой коэффициент $f\ '(x_0)$.

Проведем касательные к графику функции $y = f(x)$ в точках x_1, x_2, x_3 и отметим углы, которые они образуют с осью абсцисс. (Это угол, отсчитываемый в положительном направлении от положительного направления оси до прямой.)

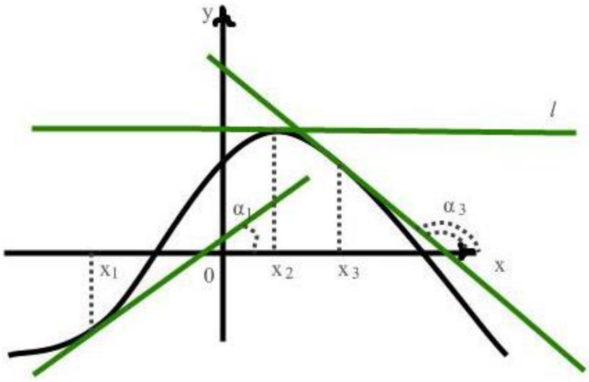


Рисунок 4

Мы видим, что угол α_1 острый, угол α_3 тупой, а угол α_2 равен нулю, так как прямая l параллельна оси Ox. Тангенс острого угла положителен, тупого — отрицателен. Поэтому $f\ '(x_1)>0, f\ '(x_2) = 0, f\ '(x_3) < 0$.

- **<u>Выведем теперь уравнение касательной</u>** к графику функции f в точке A(x_0, $f(x_0)$).

Общий вид уравнения прямой $y = kx + b$.

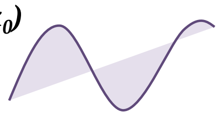
1. Найдём угловой коэффициент $k = f\ '(x_0)$, получим $y = f\ '(x0)\cdot x + b, f(x) = f\ '(x_0)\cdot x + b$
2. Найдём b. $b = f(x_0) - f\ '(x_0)\cdot x_0$.
3. Подставим полученные значения k и b в уравнение прямой:

$y = \underline{f\ '(x_0)\cdot x + f(x_0) - f\ '(x_0)\cdot x_0}$ или

$$\underline{\mathbf{y = f(x_0) + f\ '(x_0)(x - x_0)}}$$

Уравнение касательной

- $\boldsymbol{y = kx + b}$
  - $k = f^{/}(x_0)$
  - $y = f^{/}(x_0) \cdot x + b$
  - $f(x_0) = f^{/}(x_0) \cdot x_0 + b$
  - $b = f(x_0) - f^{/}(x_0) \cdot x_0$
- $\boldsymbol{y = f(x_0) + f^{/}(x_0) \cdot (x - x_0)}$



Алгоритм нахождения уравнения касательной в точке

Алгоритм

- 1. Значение функции в точке касания
- 2. Общая производная функции
- 3. Значение производной в точке касания
- 4. Подставить найденные значения в общее уравнение касательной.

2. Решение опорных задач. Рассмотрим четыре типа задач.

1) Если задана точка касания

Задание 1. Составить уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^3 - 3x - 1$ в точке М с абсциссой –2.

Решение:

1. Вычислим значение функции: $f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) - 1 = -3$;
2. найдём производную функции: $f'(x) = 3x^2 - 3$;
3. вычислим значение производной: $f'(-2) = -9$.;
4. подставим эти значения в уравнение касательной: $y = 9(x + 2) - 3 = 9x + 15$.

Ответ: $y = 9x + 15$.

2. По ординате точки касания.

Задание 2. Составить уравнение касательной в точке графика $f(x) = \frac{3-x}{x+1}$ с ординатой $y_0 = 1$.

Решение:

1. Найдем абсциссу точки касания: $\frac{3-x}{x+1} = 1$, $x_0 = 1$.
2. Найдём производную функции: $f'(x) = \frac{-4}{(x+1)^2}$.
3. Найдем угловой коэффициент касательной $f'(x_0)$: $f'(1) = -1$
4. Теперь можно записать уравнение касательной: $y = -1(x - 1) + 1 = -x + 2$.

Ответ: $y = -x + 2$.

4. ***Заданного направления.***

Задание 3. Написать уравнения касательной к графику $y = x^3 - 2x + 7$, параллельной прямой $y = x$.

Решение.

Искомая касательная параллельна прямой $y = x$. Значит, они имеют один и тот же угловой коэффициент $k = 1$, $y'(x) = 3x2 – 2$. Абсцисса x_0 точек касания удовлетворяет уравнению $3x^2 – 2 = 1$, откуда $x_0 = \pm1$.

Теперь можно написать уравнения касательных: $y = x + 5$ и $y = x + 9$.
Ответ: $y = x + 5$, $y = x + 9$.

<u>3. Условия касания графика и прямой.</u>

<u>Задача.</u>

При каких b прямая $y = 0{,}5x + b$ является касательной к графику функции $f(x) = \sqrt{x}$?

Решение.

Вспомним, что угловой коэффициент касательной – это значение производной в точке касания. Угловой коэффициент данной прямой равен k = 0,5.
Отсюда получаем уравнение для определения абсциссы х точки касания:

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0{,}5.$

Очевидно, его единственный корень –х = 1. Значение данной функции в этой точке y(1) = 1. Итак, координаты точки касания (1; 1). Теперь остается подобрать такое значение параметра b, при котором прямая проходит через эту точку, то есть координаты точки удовлетворяют уравнению прямой: 1 = 0,5 ·1 + b, откуда b = 0,5.

<u>4. Нахождение угла пересечения графика функции и прямой</u>

Углом пересечения графика функции $y = f(x)$ и прямой l называют угол, под которым в этой же точке прямую пересекает касательная к графику функции.

II. ЗАДАНИЯ:

1. **Написать конспект урока;**
2. **Учить §48 стр.251 , Задачи №1-3 стр.252-253 оформить в тетрадь.**
3. **Выполнить тест по теме: «Уравнение касательной к графику функции»**

<u>Дополнительно:</u> Подготовить сообщение о Лейбнице

ВАРИАНТ №1: Гончаров, Овчаров, Коржова, Сангулия, Халин, Чернявская, Яланжи.

ВАРИАНТ №2: Фричко, Хомюк, Шевченко, Ковалева, Прасолова, Скворцов, Ямбаршева.

В– I.

1. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = -x^2 - 4x + 2$ в точке с абсциссой x_0 = - 1.

А) у =-2х-3; Б) у = 2х-1; В) у = -2х+3; Г) у = 2х+3.
2. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x)= x^3+ 27$ в точке x_0 = 2.
А) у = 12х-3; Б) у = 12х+11; В) у = -12х+13; Г) у = 22х+35.
3. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = -x^2 + 6x + 8$ в точке с абсциссой x_0 = - 2.
А) у =2х-6; Б) у = 10х+12; В) у = 4х+8; Г) у = -10х+8.

В – I I.

1. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = -x^2 - 4x + 2$ в точке с абсциссой x_0 = 2.
А) у =-2х-32; Б) у = 2х-8; В) у = -8х+3; Г) у = -8х+6.
2. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x)= x^3+ 27$ в точке x_0 = -1.
А) у = 29х-3; Б) у = 3х+29; В) у = -12х+23; Г) у = 22х+35.
3. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = -x^2 + 6x + 8$ в точке с абсциссой x_0 = - 2.
А) у =2х-6; Б) у = 10х+12; В) у = 4х+8; Г) у = -10х+8.

https://you -EY