14.04.2021

Здравствуйте, учащиеся 103 группы!

Учебная дисциплина: математика
Тема программы: Комбинаторика
Тема урока: Размещения. Задачи на подсчет числа размещений.

Задание к уроку:

Вам необходимо самостоятельно изучить теоретические сведения, сделать необходимые записи в рабочую тетрадь (записав дату и тему урока), прочитать параграф 61 (учебник) и письменно выполнить задания.

Выполненную работу оформить в рабочих тетрадях, сфотографировать и отправить отдельным файлом в личное сообщение через социальные сети VK (в личку): **https://vk.com/id18621014** .

Выполненное задание предоставить в рукописном виде при выходе на учебную практику.

I. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ:

1. Я предлагаю решить вам ряд задач по прошедшей теме, чтобы проверить, как вы усвоили материал?

Задача 1: Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1,4,7, используя в записи числа каждую из них не более одного раза?

Нужно перечислить варианты.

Решение: для того, чтобы не пропустить и не повторить ни одно из чисел, будем записывать их в порядке возрастания. Сначала запишем числа, начинающиеся с цифры 1, затем с цифры 4, и, наконец, с цифры 7:

14, 17, 41, 47, 71, 74.

Ответ: 6.

Таким образом, их трех данных цифр можно составить всего 6 различных двузначных чисел.

Ребята, а как этот метод называется?

Ответ: Метод перебора вариантов.

А кто может предложить самый лёгкий способ решения этой задачи? В чём он заключается?

Ответ: Самый лёгкий способ решения этой задачи состоит в применении **правила произведения:** *если существует n вариантов выбора первого элемента и для каждого из них имеется m вариантов выбора второго элемента, то всего существует n · m различных пар с выбранными таким образом первым и вторым элементами.* Рассуждать будем так. Первую цифру двузначного числа можно выбрать тремя способами. Так как после выбора первой цифры останутся две, то вторую цифру можно выбрать из оставшихся цифр уже двумя способами. Следовательно, общее число искомых трехзначных чисел равно произведению $3·2= 6$.

Задача 2: Сколько различных 3-значных чисел можно составить из цифр 3, 7 и 8 (цифры не повторяются)?

378, 387, 738, 783, 873, 837.

Или по правилу произведения $3·2·1=6$

Задача3: Сколько различных трёхзначных чисел можно составить из цифр

0, 6?

По правилу произведения получаем: $1·2·2=4$ (числа)

Задача 4: Сколько различных четырёхбуквенных слов можно записать с помощью букв:

а) «к» и «а» (16)

б) «м», «о» и «р» (81)

2. Сегодня мы переходим к рассмотрению другого вида комбинаций, которые можно составить из элементов конечного множества. Ранее, при изучении перестановок из n элементов, мы составляли комбинации, используя все n элементов. Теперь же будем составлять комбинации по k элементов, беря их из имеющихся n элементов. Такие комбинации носят название размещения из n элементов по k элементов.

Для начала запишите в своих тетрадях тему сегодняшнего урока: «Размещения. Задачи на подсчет числа размещений».

А теперь рассмотрим с вами следующую задачу (условия задачи записывайте в тетрадях), после чего мы дадим определение размещению из n элементов по k.

И чтобы перейти к изучению новой темы, я предлагаю вам следующую задачу:

Задача 4:

Учащиеся 11 класса изучают по программе 12 предметов. Сколькими способами можно составить расписание уроков на один день, так чтобы было 7 разных уроков? Есть версии? Хорошо, тогда подсказка!

Я приведу вам в качестве примера другую задачу, для того чтобы вы тоже смогли воспользоваться аналогичным способом!

Задача - подсказка:

«Сколько различных двузначных чисел можно записать с помощью цифр 1,2,3,4 при условии, что в каждой записи нет одинаковых цифр?»

Перебором убедимся в том, что из четырёх цифр можно составит 12 двузначных чисел, удовлетворяющих условию:

В записи двузначного числа на первом месте может стоять любая из данных четырёх цифр, а на втором – любая из трёх оставшихся.

По правилу произведения таких двузначных чисел будет $4 \cdot 3 = 12$

При решении данной задачи из четырёх элементов, т.е. цифр 1,2,3,4 были образованы всевозможные соединения по два элемента в каждом, причём любые два соединения отличались либо составом (1,2 или 2,4), либо порядком их расположения (например: 12 или 21). Такие ***соединения называют размещениями.***

Так в задаче было установлено, что $A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$

Задача 5.

Пусть имеются три шара: красный (К), зеленый (З) и синий (С). Также имеется две пустые ячейки, в каждую из которых можно поместить только по одному из имеющихся шаров. Сколькими способами можно разместить шары в данные ячейки с учетом порядка шаров?

Пусть в первую ячейку помещен красный шар. Тогда к нему можно добавить зеленый (пара КЗ) или синий (пара КС) шар. Таким образом, получаем пары КС и КЗ. Рассуждая аналогично для зеленого и синего шаров, получим следующие пары: ЗК, ЗС, СК, СЗ. Таким образом, число размещений из 3 шаров по 2 равно 6. Обозначается это следующим образом: $A_3^2 = 6$.

Записываем в тетрадь задачу следующим образом:

Задача 5.

Пусть имеются три шара: красный (К), зеленый (З) и синий (С). Также имеется две пустые ячейки, в каждую из которых можно поместить только по одному из имеющихся шаров. Сколькими способами можно разместить шары в данные ячейки с учетом порядка шаров?

Решение.

Возможные варианты размещений:

КЗ, КС,

ЗК, ЗС,

СК, СЗ.

Таким образом, число этих размещений $A_3^2 = 6$.

Ответ: 6 способов.

Откройте ваши учебники на стр. 323 и прочитайте определение.

А теперь запишите в тетрадях определение размещения из n элементов по k:

Размещением из n элементов по k, где k≤n, называется любое множество, состоящее из k элементов, взятых в определенном порядке из данных n элементов.

Как и для перестановок, для подсчета числа размещений не обязательно составлять все размещения.

Давайте получим *формулу для вычисления числа размещений из n элементов по k.* Для этого воспользуемся уже известным нам комбинаторным правилом умножения.

Сколькими способами можно взять первый элемент из n имеющихся? (Ответ: n способами).

А второй элемент? (Ответ: (n-1) способами).

И так далее. Тогда k-й элемент можно взять (n-(k-1)) = (n-k+1) способами. Получаем: $A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$. Запишите эту формулу.

Число размещений из n элементов по k:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$$

Удобнее записать эту формулу в другом виде.

Для этого умножим и разделим правую часть получившейся формулы на (n-k)!. Получаем: $A_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$

Запишите это в своих тетрадях.

Таким образом, имеем следующую формулу для подсчета числа размещений из пэлементов по k: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$. Также запишите её себе в тетради.

Число размещений из пэлементов по k:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

2. Теперь перейдем к решению задач.

(Оформляете решение задач в тетради)

№ 1

Сколькими способами может разместиться семья из трех человек в четырехместном купе, если других пассажиров в купе нет?

Решение.

$A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 2*3*4 = 24$ (способа).

Ответ: 24 способа.

№ 2

Сколькими способами тренер может определить, кто из 12 спортсменок, готовых к участию в эстафете 4х100 м, побежит на первом, втором, третьем и четвертом этапах?

Решение.

$$A_{12}^{4}=\frac{12!}{(12-4)!}=\frac{12!}{8!}=9*10*11*12=11880$$ (способов).

Ответ: 11880 способов.

№3

Сколькими способами можно обозначить данный вектор, используя буквы A, B, C,D, E, F?

Решение.

$$A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30$$

Ответ: 30.

№4

Решить уравнение $A_n^2 = 56$

$n\cdot(n - 1) = 56$

$n^2 - n = 56$

$n^2 - n - 56 = 0$

по теореме обратной теореме Виета

$n_1 + n_2 = 1$

$n_1 \cdot n_2 = - 56$

$n_1 = 8, n_2 = -7$

Каким может быть количество элементовn

Т.к. $n \geq 2$, то $n = -7$ – посторонний корень,

значит $n = 8$.

№5

Вычислить: $\dfrac{A_{20}^{7} + A_{20}^{6}}{A_{20}^{5}}$

$$\frac{A_{20}^{7}+A_{20}^{6}}{A_{20}^{5}}=\frac{\frac{20!}{13!}+\frac{20!}{14!}}{\frac{20!}{15!}}=\frac{15!}{13!}+\frac{15!}{14!}=14\cdot 15+15=15(14+1)=225$$

Ответ: 225

Самостоятельно решаете следующие задачи с последующей проверкой

№ 6

Сколькими способами 6 студентов, сдающих экзамен, могут занять места в аудитории, в которой стоит 20 одноместных столов?

Решение

$$A_{20}^{6}=\frac{20!}{(20-6)!}=\frac{20!}{14!}=15*16*17*18*19*20=27907200$$ (способов).

Ответ: 27907200 способов.

№7

На плоскости отметили 5 точек. Их надо обозначить латинскими буквами. Сколькими способами это можно сделать (в латинском алфавите 26 букв)?

Решение

$$A_{26}^{5}=\frac{26!}{(26-5)!}=\frac{26!}{21!}=22*23*24*25*26=7893600$$ (способов).

Ответ: 7893600 способов.

2. ЗАДАНИЯ:

1) Прочитать §62
2) Решить:
на оценку «3»: №1072-1076 (четные);
на оценку «4»: №1077-1079 (нечетные);

на оценку «5»:

- **Придумать свою комбинаторную задачу и решить её.**
- **Применение комбинаторики в практической деятельности людей. (рассказ или эссе)**

Учебник «Алгебра и начала математического анализа» (Ш.А.Алимов, Ю.М. Колягин и др.) 10-11 кл., 2016г.
ссылка http://11book.ru/10-klass/232-algebra/1439-algebra-10-11-klass-alimov