19.04.2021

Здравствуйте, дорогие учащиеся!

Учебная дисциплина: «Математика»

Тема урока: «Наибольшее и наименьшее значение функции»

Задание к лекции:

Вам необходимо самостоятельно изучить текст лекции, выполнить задания к лекции и письменно ответить на контрольные вопросы.

Выполненную работу оформить в рабочей тетради и отправить отдельным файлом (электронный документ) в личное сообщение через социальные сети VK (Анжелика - Валерьевна Синещекова г. Луганск).

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ:

Сегодня на занятии вспомним теоретический материал, изученный ранее (см. занятия за **05.12.2020 и 16, 04.21**) и продолжим его рассмотрение.

Для нахождения *наибольшего* и *наименьшего* значений функции чаще всего используется график функции. В некоторых случаях можно найти наибольшее и наименьшее значения функции и без помощи графика, используя рассуждения. В более сложных случаях используется производная. Для этого сформулируем некоторые теоремы.

1. Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на нём и своего наибольшего, и своего наименьшего значений (Эта теорема доказывается в курсе высшей математики).

2. Наибольшего и наименьшего значений непрерывная функция может достигать как на концах отрезка, так и внутри него.

3. Если наибольшее (или наименьшее) значение достигается внутри отрезка, то только в *стационарной* или критической точке.

Напомним, что :

1. **Критические** точки — это точки, в которых производная функции $f(x)$ равна нулю либо не существует.

2. **Стационарные** точки — это точки, в которых производная функции *f(x)* равна нулю.

Таким образом, понятие «**Критические** точки» включает в себя понятие «**Стационарные** точки» , т.е оно шире.

Как найти наименьшее и наибольшее значения функции <u>на отрезке</u> ?

Пусть функция *f(x)* напрерывна на отрезке [a; b], тогда:

1. находим производную функции $f'(x)$.

2. Приравниваем производную к нулю, определяем точки экстремума функции, отбираем из них те, которые принадлежат отрезку [a; b].

3. Находим значения функции *y=f(x)* в отобранных точках, и в конечных точках отрезка **a** и **b**; выбираем среди полученных значений наименьшее и наибольшее.

Прототип №9. Найдите наименьшее значение функции $y = x + \dfrac{36}{x}$ **на отрезке** $[1;9]$ **.**

1) $y' = 1 - \dfrac{36}{x^2}$

$y' = 0$

$1 - \dfrac{36}{x^2} = 0$

$\dfrac{36}{x^2} = 1$

$x^2 = 36$

$x = \pm 6$

Указанному отрезку принадлежит число 6.

Найдем значение функции в этой точке и на краях отрезка.

2)

$y(6) = 6 + \dfrac{36}{6} = 12$

$y(1) = 1 + \dfrac{36}{1} = 37$

$y(9) = 9 + \dfrac{36}{9} = 13$

Формулы Алгоритм

3)Ответ: 12.

<u>**Пример 1:**</u> Найти наибольшее и наименьшее значения

функции $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x + 3$ на отрезке $[-1; 2]$.

Решение:

1) Вычислим значения функции в критических точках, принадлежащих данному отрезку: $f'(x) = (2x^3 - 12x^2 + 18x + 3)' = 6x^2 - 24x + 18 = 6(x^2 - 4x + 3) = 0$

Полученное *квадратное уравнение* имеет два действительных корня:

$x_1 = 1,\ x_2 = 3$ – критические точки.

<u>Первая</u> критическая точка принадлежит данному отрезку: $x_1 = 1 \in [-1;\ 2]$.
А, вот, <u>вторая</u> – нет: $x_2 = 3 \notin [-1;\ 2]$, поэтому про неё сразу забываем.

Вычислим значение функции в нужной точке:

$$f(x_1) = f(1) = 2\cdot 1^3 - 12\cdot 1^2 + 18\cdot 1 + 3 = 2 - 12 + 18 + 3 = \mathbf{11}$$

Итоговый результат выделен жирным цветом, при оформлении задания в тетради его удобно обвести в кружок простым карандашом или пометить как-то по-другому.

2) Вычислим значения функции на концах отрезка:

$$f(-1) = 2\cdot(-1)^3 - 12\cdot(-1)^2 + 18\cdot(-1) + 3 = -2 - 12 - 18 + 3 = \mathbf{-29}$$
$$f(2) = 2\cdot 2^3 - 12\cdot 2^2 + 18\cdot 2 + 3 = 16 - 48 + 36 + 3 = \mathbf{7}$$

Результаты опять каким-либо образом выделяем.

3) Дело сделано, среди «жирных» чисел выбираем наибольшее и наименьшее.

Ответ: наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x + 3$ на отрезке $[-1;\ 2]$ равно : $\max\limits_{[-1;\,2]} f(x) = f(1) = 11,\quad \min\limits_{[-1;\,2]} f(x) = f(-1) = -29$.

Критическое значение $x_1 = 1$ на поверку оказалось **точкой максимума**.

<u>Пример 2:</u> Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 72x + 90$ на отрезке $[-4;\ 5]$.

Решение:

1) Вычислим значения функции в критических точках, принадлежащих данному отрезку:

$$f'(x) = (x^3 + 3x^2 - 72x + 90)' = 3x^2 + 6x - 72 = 3(x^2 + 2x - 24) = 0$$
$$D = 4 + 96 = 100 \Rightarrow \sqrt{D} = 10$$
$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 10}{2}$$

$x_1 = 4 \in [-4;\ 5],\ x_2 = -6 \notin [-4;\ 5]$ – критические точки.

$$f(4) = 4^3 + 3\cdot 4^2 - 72\cdot 4 + 90 = 64 + 48 - 288 + 90 = \mathbf{-86}$$

2)Вычислим значения функции на концах отрезка:

$$f(-4) = (-4)^3 + 3\cdot(-4)^2 - 72\cdot(-4) + 90 = -64 + 48 + 288 + 90 = \mathbf{362}$$
$$f(5) = 5^3 + 3\cdot 5^2 - 72\cdot 5 + 90 = 125 + 75 - 360 + 90 = \mathbf{-70}$$

Ответ: наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 72x + 90$ на отрезке $[-4; 5]$ будет $\max\limits_{[-4;5]} f(x) = f(-4) = 362, \quad \min\limits_{[-4;5]} f(x) = f(4) = -86$.

<u>Пример 3:</u> Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке

$f(x) = 3x^4 - 12x^2 + 5, \quad [-2; 1]$

Решение:

1) Вычислим значения функции в критических точках, принадлежащих данному отрезку: $f'(x) = (3x^4 - 12x^2 + 5)' = 3 \cdot 4x^3 - 12 \cdot 2x + 0 = 12x(x^2 - 2) = 0$.

Критических точек тут целых три: $x_1 = -\sqrt{2},\ x_2 = 0,\ x_3 = \sqrt{2}$.

Первые две точки принадлежат нашему отрезку:
$$x_1 = -\sqrt{2} \in [-2; 1]$$
$$x_2 = 0 \in [-2; 1]$$

Но третья не принадлежит: $x_3 = \sqrt{2} \notin [-2; 1]$ (надеюсь, все сумели сосчитать, что $-\sqrt{2} \approx -1{,}41, \quad \sqrt{2} \approx 1{,}41$).

Вычислим значения функции в подходящих точках:

$$f(-\sqrt{2}) = 3 \cdot (-\sqrt{2})^4 - 12 \cdot (-\sqrt{2})^2 + 5 = 12 - 24 + 5 = \mathbf{-7}$$
$$f(0) = 3 \cdot 0^4 - 12 \cdot 0^2 + 5 = \mathbf{5}$$

2) Вычислим значения функции на концах отрезка:

$$f(-2) = 3 \cdot 2^4 - 12 \cdot 2^2 + 5 = 48 - 48 + 5 = \mathbf{5}$$
$$f(1) = 3 \cdot 1^4 - 12 \cdot 1^2 + 5 = 3 - 12 + 5 = \mathbf{-4}$$

Среди «жирных» чисел выбираем *наибольшее* и *наименьшее* значения. Максимальное значение («пятёрка») достигается сразу в двух точках, и это необходимо указать в завершающей записи:

Ответ: наибольшему и наименьшему значениям функции на заданном отрезке $f(x) = 3x^4 - 12x^2 + 5, \quad [-2; 1]$ будут соответствовать следующие значения

$$\max\limits_{[-2;1]} f(x) = f(-2) = f(0) = 5, \quad \min\limits_{[-2;1]} f(x) = f(-\sqrt{2}) = -7.$$

Время от времени критические точки могут совпадать с одним или даже с обоими концами отрезка, и в этом случае укорачивается второй этап решения. Следующий пример для самостоятельного изучения посвящен как раз такой ситуации:

Пример 4: Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке

$f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1, \quad [0;\ 3]$.

Решение*:*

1) Вычислим значения функции в критических точках, принадлежащих данному отрезку:

$$f'(x) = (3x^4 - 4x^3 + 1)' = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1) = 0$$

$x_1 = 0 \in [0;\ 3],\ x_2 = 1 \in [0;\ 3]$ – критические точки.

$$f(0) = \mathbf{1}$$
$$f(1) = 3 - 4 + 1 = \mathbf{0}$$

2) Вычислим значения функции на концах отрезка:

$f(0)$ уже рассчитано в предыдущем пункте.

$$f(3) = 3 \cdot 3^4 - 4 \cdot 3^3 + 1 = 243 - 108 + 1 = \mathbf{136}$$

Ответ: наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке

$f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1, \quad [0;\ 3]$ будет $\max\limits_{[0;\ 3]} f(x) = f(3) = 136, \quad \min\limits_{[0;3]} f(x) = f(1) = 0$.

А что делать, если нужно найти наибольшее или наименьшее значения функции, непрерывной на интервале? Один из вариантов — графический метод, который подразумевает построение графика функции и определение наименьшего или наибольшего значения функции по нему.

ЗАДАНИЯ К ЛЕКЦИИ:

- оформить конспект учебного материала по данной теме;
- все примеры занести в основной конспект лекции;
- письменно ответить на **КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ:**

1. В чем отличие понятий «**Критические** точки» и «**Стационарные** точки» ?
2. Для нахождения *наибольшего* и *наименьшего* значений функции чаще всего используются какие методы ?