

Здравствуйте, учащиеся 203 группы!

Учебная дисциплина: математика

Тема урока: Возрастание и убывание функции. Нахождение промежутков возрастания и убывания функции.

Задание к уроку:

Вам необходимо самостоятельно изучить теоретические сведения, написать конспект урока и выполнить задания.

Выполненную работу оформить в рабочих тетрадях и отправить отдельным файлом (электронный документ) в личное сообщение через социальные сети VK (в личку): <https://vk.com/id18621014>.

Если такой возможности нет, выполненное задание предоставить в рукописном виде при выходе на учебную практику.

Электронный вариант учебника: https://vpr-klass.com/uchebniki/matematika/10-11_klass_alimov/10-11_klass_alimov_uchebnik_chitat'_onlajn.html

I. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ:

На предыдущих уроках вы познакомились с понятием производной функции, операцией дифференцирования. Учились работать по формулам и правилам дифференцирования. Решали задачи, связанными с её геометрическим и механическим смыслами. Но производная – это ещё и уникальный аппарат для изучения свойств функции. Например, с помощью производной можно находить промежутки монотонности, её наибольшее и наименьшее значение, решать практические задачи.

Сегодня вам предстоит выяснить, как именно можно применять производную к нахождению промежутков возрастания и убывания функций.

Условимся термин «промежуток» использовать для обозначения таких числовых множеств, как отрезок $[a;b]$, интервал $(a;b)$, полуинтервалы $[a;b)$ и $(a;b]$.

При этом точки a и b называют *граничными точками*, а все остальные точки интервала $(a;b)$ -*внутренними точками промежутка*.

Функция $f(x)$ называется *возрастающей* на некотором промежутке, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т.е. для

любых точек x_1 и x_2 из этого промежутка, таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$. (Слайд 3)

Если для любых точек x_1 и x_2 данного промежутка, таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$, то функция $f(x)$ называется **убывающей** на этом промежутке.

Промежутки возрастания и убывания функции **называются промежутками монотонности этой функции.**

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$. Тогда если $f'(x) > 0$ для всех $x \in (a; b)$, то функция $f(x)$ возрастает на отрезке $[a; b]$, а если $f'(x) < 0$, то она убывает на этом отрезке.

Применяя определение возрастающей (убывающей) функции трудно найти промежутки монотонности, поэтому мы будем изучать признаки монотонности функции, использующие понятие производной.

При доказательстве теорем о достаточных условиях возрастания или убывания функции используется следующая теорема, которая называется *теоремой Лагранжа*.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$. Тогда существует точка, такая $c \in (a; b)$, что $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Запись в тетрадах:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad (1)$$

Эта теорема доказывается в курсе высшей математик. Поясним геометрический смысл формулы (1). Проведем прямую l (рис.56 из учебника) через точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ графика функции $y = f(x)$ и назовем эту прямую секущей. Угловой коэффициент k секущей l равен

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (2)$$

Равенство (1) можно записать в виде

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (3)$$

Из равенства (2) и (3) следует, что угловой коэффициент $f'(c)$ касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке C с абсциссой c равен угловому коэффициенту k секущей l .

Таким образом, на интервале $(a;b)$ найдется такая точка c , что касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке $C(c; f(c))$ параллельна секущей l .

Давайте запишем алгоритм нахождения промежутков возрастания и убывания:

1. Находим производную функции.
2. Находим, при каком значении x , производная функции равна нулю.
3. Находим промежутки, на которые найденная точка разбивает ось Ox , и находим значение производной функции в какой-нибудь точке каждого из интервалов.
4. Находим промежутки возрастания и убывания функции.

Давайте рассмотрим функцию $f(x)=2x^2+4x-4$.

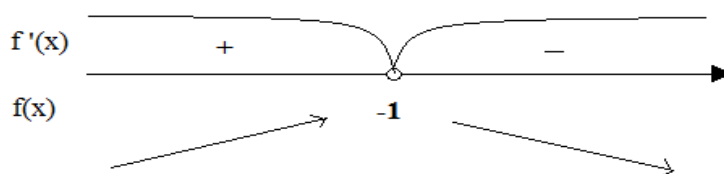
Сначала находим производную этой функции.

$$f'(x) = (2x^2+4x-4)' = 4x+4.$$

Затем производную $f'(x)$ приравняем к нулю и находим значение x .

$$f'(x)=0, \text{ т.е. } 4x+4=0; x=-1.$$

После этого отмечаем значение x на числовой оси и выясняем какие знаки будут на интервалах.



Делаем вывод: т.к. $f'(x)>0$ на интервале $(-\infty;-1)$, то функция $f(x)$ - возрастает; а на интервале $(-1; +\infty)$ функция $f(x)$ - убывает, т.к. $f'(x)<0$.

Промежутки возрастания и убывания функции называются *промежутками монотонности* этой функции.

При доказательстве теорем о достаточных условиях возрастания или убывания функции используется следующая теорема, которая называется *теоремой Лагранжа*.

Прочитайте вслух первую теорему из учебника.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема на интервале $(a;b)$. Тогда существует точка, такая $c \in (a;b)$, что $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

Запись в тетрадях:

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

Прочитайте нам вторую теорему.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема на интервале $(a;b)$. Тогда если $f'(x) > 0$ для всех $x \in (a;b)$, то функция $f(x)$ возрастает на отрезке $[a;b]$, а если $f'(x) < 0$, то она убывает на этом отрезке.

Ребята, а теперь *открываем №1* в учебнике *на странице 101* и решаем под цифрами 1,3. Что нам нужно найти в данном задании?

- Нам нужно найти интервалы возрастания и убывания функции.
- Что является первым шагом алгоритма решения таких задач:
- Найдем производную функции
- Какого вида функция $f(x)=5x^2-3x-1$, является ли она сложной?

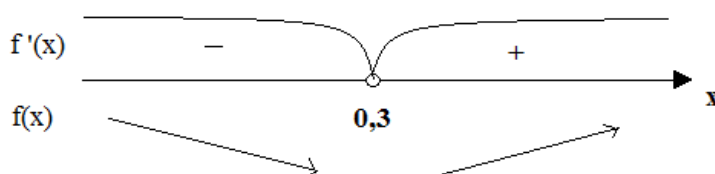
Функция сложная, представляет собой сумму нескольких функций, значит найдем производные каждого из слагаемых

$$f(x)=5x^2-3x-1$$

$$f'(x)=(5x^2-3x-1)'=(5x^2)'-(3x)'-1'=10x-3$$

- Каков следующий шаг решения?

Найдем, при каком значении x , производная функции равна нулю: $f'(x)=0$;
 $10x-3=0$; $x=0,3$.



Определяем промежутки возрастания и убывания функции.

Ответ: на интервале $(-\infty; 0,3)$ – функция $f(x)$ – убывает, т.к. $f'(x) < 0$;

на интервале $(0,3; +\infty)$ – функция возрастает, т.к. $f'(x) > 0$.

Найти интервалы возрастания и убывания функции.

(Запись в тетрадах)

- Что является первым шагом алгоритма решения таких задач:
- Найдем производную функции
- Какого вида функция $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4$, является ли она сложной?

Функция сложная, представляет собой сумму нескольких функций, значит найдем производные каждого из слагаемых

$$f'(x) = (2x^3 + 3x^2 - 4)' = (2x^3)' + (3x^2)' - (4)' = 6x^2 + 6x$$

- Каков следующий шаг решения?

Найдем, при каком значении x , производная функции равна нулю: $f'(x) = 0$;
 $6x^2 + 6x = 0$; $6x(x+1) = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = -1$.



Определяем промежутки возрастания и убывания функции.

Ответ: на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(0; +\infty)$ – функция $f(x)$ возрастает, т.к. $f'(x) > 0$;

на интервале $(-1; 0)$ – функция убывает, т.к. $f'(x) < 0$.

Теперь в тетрадах решим подобное задание под №2 так же под цифрами 1,3.

$$f(x) = x^2 - 3x + 4$$

$$f(x) = x^3 - 3x$$

Найти интервалы возрастания и убывания функции.

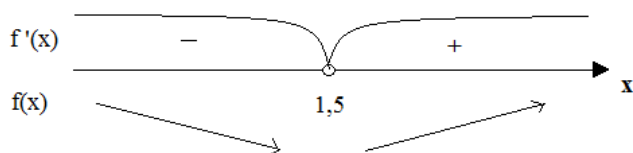
(Запись в тетрадах).

Решение:

$$1) \quad f(x) = x^2 - 3x + 4$$

$$f'(x) = (x^2 - 3x + 4)' = 2x - 3$$

$$f'(x) = 0; 2x - 3 = 0; x = 1,5.$$



Ответ: на интервале $(-\infty; 1,5)$ – функция $f(x)$ – убывает, т.к. $f'(x) < 0$;
на интервале $(1,5; +\infty)$ – функция возрастает, т.к. $f'(x) > 0$.

Найти интервалы возрастания и убывания функции.

(Запись в тетрадах).

$$3) f(x) = x^3 - 3x$$

$$f'(x) = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0; 3x^2 - 3 = 0; x_1 = -1; x_2 = 1.$$



Ответ: на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$ – функция $f(x)$ – функция возрастает, т.к. $f'(x) > 0$;
на интервале $(-1; 1)$ – функция убывает, т.к. $f'(x) < 0$.

II. ЗАДАНИЯ:

- 1) Написать и выучить конспект урока;
- 2) Прочитать §49, стр. 261 (Выучить формулировки теорем и алгоритм исследования функции на монотонность), №№ 900 (1,2,4), 902(3), 903(2).